

auch für den Fall eines vorgegebenen Magnetfeldes, das sowohl das Eigenmagnetfeld als auch ein Longitudinalfeld umfaßt, berechnet werden können. Die hierfür angegebenen Formeln für die Stromdichte  $j_{ex\omega}$  und die Wärmestromkomponenten  $W_{ex\omega}$  und

$W_{er\omega}$  enthalten den Einfluß der Elektronenwechselwirkung bis zur zweiten Näherung.

Wird Eigenmagnetfeld oder Longitudinalfeld je für sich betrachtet, so lassen sich die Näherungen  $n$ -ter Ordnung angeben.

## Über eine statistische Beschreibung vollionisierter Plasmen

Von H. J. KAEPELER

Aus dem Institut für Hochtemperaturforschung der Technischen Hochschule Stuttgart  
(Prof. Dr. KLUGE, Prof. Dr. HÖCKER)

(Z. Naturforsch. 14 a, 1056—1069 [1959]; eingegangen am 13. August 1959)

Ausgehend von der LIOUVILLE-Gleichung werden mit Hilfe der Methoden der mathematischen Statistik die makroskopischen Gleichungen für ein vollionisiertes Plasma abgeleitet. Eine allgemeine HAMILTON-Funktion für vollionisierte Plasmen, welche auch Strahlungsemision und Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie berücksichtigt, wird aufgestellt und dient zur Ableitung der MAXWELLSchen Gleichungen für Plasma-Mikrofelder und allgemeiner hydromagnetischer Gleichungen. Durch die Auffassung der Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichte in der LIOUVILLE-Gleichung als Momentenproblem ergibt sich ferner ein System von Integro-Differentialgleichungen zur Darstellung der eingeführten Partialmomente, die sich gleichzeitig als die Transportgrößen deuten lassen, die in den makroskopischen Gleichungen auftreten. Die Momentengleichungen werden ebenfalls aus der BOLTZMANN-Gleichung hergeleitet. Die beiden Beschreibungen gehen ineinander über und man erhält gleichzeitig ein lösbares System von partiellen Differentialgleichungen, wenn man von vornherein über die inneren Felder im Plasma mittelt und nur deren kumulative Wirkung berücksichtigt. Dies erscheint erlaubt für den Fall, daß die mittlere freie Weglänge groß gegen den DEBYE-Radius ist. Es wird diskutiert, warum die so erhaltenen Gleichungen nicht geeignet sind, eine zufriedenstellende Beschreibung mikroskopischer Erscheinungen im Plasma zu geben, jedoch ein in sich geschlossenes System für die Änderung makroskopischer Observablen darstellen, die ferner geeignet sind, Relaxationserscheinungen von Transportgrößen zu erfassen.

Eine der wesentlichen Aufgaben der theoretischen Plasma-Physik ist die Ableitung geeigneter Gleichungen, die eine vollständige Beschreibung makroskopischer, wie auch mikroskopischer Erscheinungen im Plasma erlauben. So z. B. haben BRUECKNER und WATSON<sup>1, 2</sup> makroskopische Gleichungen aus der BOLTZMANN-Gleichung und BRITTIN<sup>3</sup> sehr allgemeine hydromagnetische Gleichungen aus der LIOUVILLE-Gleichung abgeleitet. In früheren Arbeiten<sup>4—7</sup> von Verf. und Mitarbeitern wurde versucht, gewisse Grundlagen zur statistischen Behandlung von mehrkomponentigen, reagierenden, nicht-isothermen Plasmen auszuarbeiten. Besondere Beachtung wurde dabei der Anwendung und Erweiterung der GRADSchen Methode<sup>8</sup> der Lösung der BOLTZMANN-Gleichung für den Fall von Plasmen<sup>5—7</sup> geschenkt.

Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit wurde dem

Verfasser eine Behandlung mehrkomponentiger, nichtreagierender Plasmen von KOLODNER<sup>9</sup> bekannt. Diese baut auf der Lösung der BOLTZMANN-Gleichung nach der GRADSchen Methode auf und ist im wesentlichen dasselbe Verfahren, über welches der Verfasser zum ersten Mal auf dem IUTAM Symposium über Grenzschichtforschung<sup>5</sup> im August 1957 berichtete.

Die Lösung der Stoßintegrale für COULOMB-Wechselwirkung ist von KOLODNER auf andere Weise durchgeführt worden als wie beim Verf.<sup>7</sup>

Beim GRADSchen Verfahren zur Lösung der BOLTZMANN-Gleichung wird die Wahrscheinlichkeitsdichte in eine Reihe hermitescher Polynome entwickelt, wobei sich die Koeffizienten der Entwicklung als Partial-Momente der zu suchenden Verteilung ergeben, d. h. die Lösung wird als Momentenproblem der ma-

<sup>1</sup> K. M. WATSON, Phys. Rev. **102**, 12 [1956].

<sup>2</sup> K. A. BRUECKNER u. K. M. WATSON, Phys. Rev. **102**, 19 [1956].

<sup>3</sup> W. E. BRITTIN, Phys. Rev. **106**, 843 [1957].

<sup>4</sup> H. J. KAEPELER u. G. BAUMANN, Mitt. Forsch.-Inst. f. Physik d. Strahlantriebe, Nr. 8, Stuttgart, Nov. 1956.

<sup>5</sup> H. J. KAEPELER u. A. ZADDACH, in: Grenzschichtforschung (H. GÖRTLER), Springer-Verlag, Berlin 1958, S. 235.

<sup>6</sup> H. J. KAEPELER, in: Conference on Extremely High Temperatures (H. FISCHER u. L. C. MANSUR), Wiley & Sons, New York 1958, S. 147.

<sup>7</sup> H. J. KAEPELER, Mitt. Forsch.-Inst. f. Physik d. Strahlantriebe, Nr. 15, Stuttgart, März 1958.

<sup>8</sup> H. GRAD, Comm. Pure Appl. Math. **2**, 332 [1949].

<sup>9</sup> I. I. KOLODNER, AEC-Report NYO-7980, Sept. 1957.



thematischen Statistik aufgefaßt. Im GRADSchen Falle (einkomponentiges Gas MAXWELLScher Moleküle) ergeben sich dann aus der BOLTZMANN-Gleichung die verschiedenen partiellen Differentialgleichungen zur Darstellung dieser Momente. In der von Verf. und Mitarbeitern durchgeführten Erweiterung dieses Verfahrens für den Fall mehrkomponentiger, nichtisothermer und reagierender Plasmen ergibt sich ebenfalls ein System partieller Differentialgleichungen für die Momente.

Ein solches Verfahren wäre nun an sich geeignet, makroskopische wie auch mikroskopische Erscheinungen in Plasmen zu behandeln. Für erstere hat man die verschiedenen Erhaltungssätze und Transportgleichungen, für letztere kann eine Betrachtung des Verlaufs der Wahrscheinlichkeitsdichte herangezogen werden. So z. B. könnte man nicht nur die Änderung makroskopischer Größen des Systems

beim Durchgang durch eine Stoßwelle im Plasma berechnen, sondern auch mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte das Verhalten einzelner Elektronen und Ionen an der Diskontinuitätsstelle untersuchen. Jedoch ist bekannt, daß die BOLTZMANN-Gleichung für ein Plasma deshalb nicht gültig ist, weil die HAMILTON-Funktion eines Plasmas nicht in den Koordinaten der Einzelteilchen separierbar ist und somit keine Beschreibung im  $\mu$ -Raum zuläßt. Obwohl für den Fall der Transporterscheinungen eines Elektronengases in Festkörpern<sup>10</sup> gezeigt wurde, daß die BOLTZMANN-Gleichung für den Fall extremer Verdünnung gültig wird, dürfte es zweifelhaft sein, damit im Falle eines Plasmas eine zufriedenstellende Beschreibung mikroskopischer Vorgänge zu erhalten. Aus diesem Grunde wurde eine Lösung der LIOUVILLE-Gleichung mit Hilfe des Momentenproblems versucht, die im folgenden diskutiert werden soll.

## I. Statistische Grundlagen

### 1. Wahrscheinlichkeitsdichte, Momente, Liouville-Gleichung

Es sei  $F^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t)$  eine  $(6N+1)$ -dimensionale Verteilungsfunktion im KOLMOGOROFF-schen Sinne<sup>11, 12</sup>. Die  $(6N+1)$ -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ist dann

$$f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) = d^{(N)} F^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) / d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N.$$

Die Phasenpunkte im  $6N$ -dimensionalen  $\Gamma$ -Raum haben dabei die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_k$  und die Impulsvektoren  $\mathbf{p}_k$ .  $t$  ist die Zeit. Für  $f^{(N)}$  gelte die Normierung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N = 1. \quad (1)$$

Das Partialmoment (Impuls-Moment)  $m$ -ter Ordnung ist

$$M_{i_1 \dots i_m}^{(m)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \mathbf{p}_{i_1} \dots \mathbf{p}_{i_m} f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (2)$$

Den zeitlichen Erwartungswert einer beliebigen dynamischen Variablen  $\alpha$  erhält man zu

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha; f^{(N)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \alpha f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, den  $k$ -ten Phasenpunkt bei  $\mathbf{r}_k$  anzutreffen, ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{k-1} d\mathbf{r}_{k+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N,$$

<sup>10</sup> W. KOHN u. J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. **108**, 590 [1957]; **109**, 1892 [1958].

<sup>12</sup> H. CRAMÉR, Mathematical Methods of Statistics, University Press, Princeton 1956.

<sup>11</sup> A. N. KOLMOGOROFF, Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publ., New York 1950.

wobei die Integration über die Ortsvektoren mit Ausnahme von  $r_k$  und über alle Impulsvektoren auszuführen ist. Unter Einführung der DIRACSchen  $\delta$ -Funktion erhält man für die Wahrscheinlichkeit pro Volumeneinheit, daß der  $k$ -te Phasenpunkt zur Zeit  $t$  am Ort  $r$  anzutreffen ist,

$$\langle \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N; t) dr_1 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N.$$

Den Beitrag des  $k$ -ten Phasenpunktes zum Erwartungswert einer dynamischen Variablen am Ort  $r$  zur Zeit  $t$  erhält man zu

$$\langle \alpha \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \alpha \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N; t) dr_1 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N$$

und der Beitrag aller Phasenpunkte ist demzufolge

$$\sum_{k=1}^N \langle \alpha \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \rangle = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \alpha \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N; t) dr_1 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N \quad (4)$$

Wendet man dies auf das Partial-Moment  $m$ -ter Ordnung (2) an, so folgt schließlich

$$M_{i_1 \dots i_m}^{(m)}(r, t) = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int p_{i_1} \dots p_{i_m} \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N; t) dr_1 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N. \quad (5)$$

Damit sind die  $M^{(m)}$  nur Funktionen von  $r$  und  $t$ .

Es sollen zunächst noch einige Bemerkungen über Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte gemacht werden. In der mathematischen Statistik ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit  $P$  per axiomem eingeführt. Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit  $P$ , Verteilungsfunktion  $F$  und Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  ist

$$\left. \begin{aligned} P(x_1 \leq x \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) \\ P(x \leq x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = F(x_1) \end{aligned} \right\} \quad f(x) = F'(x).$$

Dabei ist  $x(A)$  eine Zufallsvariable und  $x(A) = x(A)$  die Realisation dieser Zufallsvariablen. Es können  $x$  und  $f(x)$  völlig kontinuierliche Größen sein. Jedoch gibt die Realisation der Zufallsvariablen immer einen diskreten Wert. Dies besagt, daß ein Teilchen z. B. ein völlig kontinuierliches Spektrum möglicher Geschwindigkeiten haben kann, bei einer Messung am Ort  $r$  zur Zeit  $t$  aber nur ein diskreter Wert dieses Spektrums beobachtet (realisiert) wird. Damit kann die Wahrscheinlichkeitsdichte eine völlig kontinuierliche Funktion sein (was mathematische Erfordernisse befriedigt), obwohl man ein System von  $N$  diskreten Teilchen betrachtet (was der physikalischen Tatsache entspricht), wobei das Feststellen

dieser diskreten Teilchen jedoch nur durch eine Messung erfolgen kann. Hierauf ist bereits früher<sup>7</sup> ausführlich hingewiesen worden.

Gelten die Gesetze der klassischen Mechanik, dann ist die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f^{(N)}$  im  $\Gamma$ -Raum gegeben durch die LIOUVILLE-Gleichung

$$\frac{D f^{(N)}}{D t} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + [H, f^{(N)}] = 0, \quad (6)$$

wobei  $[H, \cdot]$  die POISSON-Klammern und  $H$  die HAMILTON-Funktion ist.  $D/D t$  ist der STOKES-Operator.

## 2. Aufstellung der Transportgleichung

Die zeitliche Änderung einer Größe  $\langle \alpha \rangle$  ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha; f^{(N)} \rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}; f^{(N)} \right\rangle + \left\langle \alpha; \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} \right\rangle.$$

Substituiert man nun (6) in die obige Gleichung, dann folgt

$$\frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}; f^{(N)} \right\rangle - \langle \alpha; [H, f^{(N)}] \rangle.$$

Anwendung des GREENSchen Satzes auf den Raum der  $r_k$  und  $p_k$  ergibt, daß die POISSON-Klammern sich wie ein antisymmetrischer Operator gegenüber einer Vertauschung von  $\alpha$  und  $f^{(N)}$  verhalten. Damit

resultiert

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t} ; f^{(N)} \right\rangle + \langle [H, \alpha] ; f^{(N)} \rangle \quad (7)$$

oder, wegen

$$[H, \alpha] = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r_k} - \frac{\partial H}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)$$

ergibt sich schließlich als allgemeine Transportgleichung,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha ; f^{(N)} \rangle - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t} ; f^{(N)} \right\rangle - \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r_k} - \frac{\partial H}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right\rangle \\ = \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha ; f^{(N)} \rangle - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t} ; f^{(N)} \right\rangle - \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\langle p_k \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r_k} ; f^{(N)} \right\rangle - \sum_{k=1}^N \left\langle (\mathfrak{V}_k + \mathfrak{X}_k) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} ; f^{(N)} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Gleichung kann noch etwas umgeformt werden. Mit

$$\left\langle p_k \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r_k} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left\langle p_k \alpha \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle + \left\langle p_k \frac{\partial \alpha}{\partial r} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle$$

wegen

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \delta(r_k - r) = - \frac{\partial}{\partial r} \delta(r_k - r) \quad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \rangle + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\langle p_k \alpha \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle \right\} - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle \\ - \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\langle p_k \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle - \sum_{k=1}^N \left\langle (\mathfrak{V}_k + \mathfrak{X}_k) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Es erscheint zweckmäßiger, an Stelle der Impulse  $p_k$  die Geschwindigkeiten  $v_k$  einzuführen. Es seien folgende weitere Geschwindigkeiten mit Hilfe von  $v_k$  definiert:

$$\langle v_k \rangle = \bar{v}_k(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int v_k \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; v_1, \dots, v_N; t) dr_1 \dots dr_N dv_1 \dots dv_N, \quad (10)$$

$$\varrho_r \bar{v}_r(r, t) = \sum_{k=1}^r \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int m_k v_k \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; v_1, \dots, v_N) dr_1 \dots dr_N dv_1 \dots dv_N, \quad (11)$$

$$u(r, t) = \frac{1}{\varrho} \sum_r \varrho_r \bar{v}_r, \quad \varrho = \sum_r \varrho_r, \quad \mathfrak{V}_k(v_k, r, t) = v_k - u. \quad (12, 13)$$

Ferner seien noch die Koordinaten des elektromagnetischen Feldes,  $q_i$  und  $p_i$ , eingeführt. Die neue Wahrscheinlichkeitsdichte ist somit  $f(r, v, q_i, p_i)$ . Da die Funktionaldeterminante der Transformation  $(r, p, q_i, p_i) \rightarrow (r, v, q_i, p_i)$  eine Konstante ist, ergibt sich sofort

$$f(r, p, q_i, p_i) = \text{const } f(r, v, q_i, p_i)$$

und das bisher Ausgeführte ist direkt auf die neue Wahrscheinlichkeitsdichte anwendbar.

### 3. Orthogonalreihenentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte

Nach diesen grundsätzlichen Bemerkungen sollen nun Wahrscheinlichkeitsdichte und deren Entwicklung in eine Reihe hermitescher Polynome, Geschwindigkeitsmomente und Transportgleichungen explizit angegeben werden.

Das Geschwindigkeitsmoment (Partial-Moment)  $m$ -ter Ordnung ist jetzt

$$\begin{aligned} M_{v, i_1 \dots}^{(m)}(r, t) &= \sum_{k=1}^r m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i_1} V_{k, i_2} \dots \delta(r_k - r) f^{(N)}(r_1, \dots, r_N; v_1, \dots, v_N; t) dr_1 \dots dr_N dv_1 \dots dv_N \\ &= \sum_{k=1}^r m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i_1} V_{k, i_2} \dots f^{(N)}(r; v_1, \dots, v_N; t) dv_1 \dots dv_N. \end{aligned} \quad (14)$$

Letzteren Ausdruck erhält man unter Berücksichtigung von

$$\int f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_k}{\partial \mathfrak{r}_k} = 0, \quad \left( \text{jedoch } \frac{\partial \mathfrak{B}_k}{\partial \mathfrak{r}} \neq 0! \right).$$

Hat man die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f^{(\mu)}$  im  $\mu$ -Raum, dann hat man für das Geschwindigkeitsmoment  $m$ -ter Ordnung, wenn  $\nu$  ebenfalls die Laufzahl einer Komponente des Plasmas bedeutet,

$$M_{\nu, i j \dots}^{(m)}(\mathfrak{r}, t) = \int V_i V_j \dots f_{\nu}^{(\mu)}(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, t) d\mathfrak{v}. \quad (15)$$

Es ist sofort ersichtlich, daß beide Ausdrücke äquivalent sind und (14) für den Fall, daß eine Beschreibung im  $\mu$ -Raum zulässig ist, in (15) übergeht.

Die interessierenden Momente sind hier: a) das Moment nullter Ordnung

$$M_{\nu}^{(0)}(\mathfrak{r}, t) = \varrho_{\nu}(\mathfrak{r}, t) = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) f^{(N)}(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_N; \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_N; t) d\mathfrak{r}_1 \dots d\mathfrak{r}_N d\mathfrak{v}_1 \dots d\mathfrak{v}_N, \quad (16)$$

was gleich der Partialdichte der  $\nu$ -ten Komponente des Plasmas ist, b) das Moment erster Ordnung,

$$M_{\nu, i}^{(1)}(\mathfrak{r}, t) = j_i(\mathfrak{r}, t) = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i} \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) f^{(N)}(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_N; \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_N; t) d\mathfrak{r}_1 \dots d\mathfrak{r}_N d\mathfrak{v}_1 \dots d\mathfrak{v}_N \quad (17)$$

der Massenstromvektor der  $\nu$ -ten Komponente, c) das Moment zweiter Ordnung

$$M_{\nu, i j}^{(2)}(\mathfrak{r}, t) = P_{\nu, i j}(\mathfrak{r}, t) = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i} V_{k, j} \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) f^{(N)}(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_N; \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_N; t) d\mathfrak{r}_1 \dots d\mathfrak{r}_N d\mathfrak{v}_1 \dots d\mathfrak{v}_N \quad (18)$$

der „Drucktensor“ der  $\nu$ -ten Komponente und schließlich d) das Moment dritter Ordnung

$$M_{\nu, i j l}^{(3)}(\mathfrak{r}, t) = Q_{\nu, i j l}(\mathfrak{r}, t) = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i} V_{k, j} V_{k, l} \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) f^{(N)}(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_N; \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_N; t) d\mathfrak{r}_1 \dots d\mathfrak{r}_N d\mathfrak{v}_1 \dots d\mathfrak{v}_N \quad (19)$$

der Wärmestromtensor der  $\nu$ -ten Komponente des Plasmas.

$$p_{\nu} = \frac{1}{3} \sum_i P_{\nu, i i}. \quad (20)$$

Verjüngung des Geschwindigkeitsmoments zweiter Ordnung (Drucktensor) ergibt den (skalaren) Partialdruck der  $\nu$ -ten Komponente

$$p_{\nu, i j} = P_{\nu, i j} = p_{\nu} \delta_{i j}, \quad (21)$$

wobei  $\delta_{i j}$  der KRONECKER-Tensor ist.

Ferner wird rein formal eine Partial-Temperatur  $T$  eingeführt durch

$$R T_{\nu} = p_{\nu} / \varrho_{\nu}. \quad (22)$$

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte erfordert noch das Moment 4. Ordnung

$$M_{\nu, i j l m}^{(4)} = S_{\nu, i j l m} \quad (23)$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int V_{k, i} V_{k, j} V_{k, l} V_{k, m} \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) f^{(N)}(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_N; \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_N; t) d\mathfrak{r}_1 \dots d\mathfrak{r}_N d\mathfrak{v}_1 \dots d\mathfrak{v}_N,$$

welches durch den Ausdruck

$$S_{i j l m} = \frac{1}{\varrho} [P_{i j} P_{l m} + P_{i l} P_{j m} + P_{i m} P_{j l}] \quad (24)$$

angenähert werden soll. Diese Approximation trägt insbesondere einem elliptischen Charakter einer Verteilung (Plasma im Magnetfeld) Rechnung \*.

\* Anm. b. d. Korr.: Man veranschaulicht sich dies am besten, wenn man von einer Gleichgewichtsverteilung elliptischen Charakters  $f = \text{const} \cdot (T_1 T_2 T_3)^{-1/2} \exp\{-V_1^2/2 R T_1 - V_2^2/2 R T_2 - V_3^2/2 R T_3\}$  ausgeht. Bei dieser Verteilung enthält die Spur des Moments 2. Ordnung ungleiche Glieder. Sind die Koordinatenachsen nicht parallel zu den Achsen des Ellipsoids (allgemeiner Fall), dann werden außerdem die Glieder außerhalb der Hauptdiagonalen ungleich Null. Man transformiert bei der Berechnung von  $S_{i j l m}$  auf Hauptachsen, spaltet in Teilintegrale auf und transformiert anschließend wieder zurück. Dabei erhält man als Ergebnis den Ausdruck Gl. (24). Die explizite mathematische Darstellung hierzu soll u. a. in einer späteren Arbeit ausgeführt werden.

Diese Größen sind für das Gesamtsystem,

$$\varrho = \sum_r \varrho_r = \sum_r n_r m_r, \quad j_r = \sum_r j_r, \quad (25, 26)$$

$$P_{ij} = \sum_r P_{r,ij}, \quad Q_{ijl} = \sum_r Q_{r,ijl}, \quad (27, 28)$$

$$S_{ijlm} = \sum_r S_{r,ijlm}, \quad p = \sum_r p_r, \quad (29, 30)$$

$$p_{ij} = \sum_r p_{r,ij}, \quad (31)$$

wobei die Temperatur für das Gesamtsystem entsprechend

$$R T = \frac{p}{\varrho} = \sum_r \frac{p_r}{\varrho} = \sum_r \frac{p_r}{\varrho_r} \cdot \frac{\varrho_r}{\varrho} = R \sum_r T_r \cdot \frac{\varrho_r}{\varrho}, \quad (32)$$

$$\text{also} \quad T = \sum_r T_r \cdot \frac{\varrho_r}{\varrho} \quad (33)$$

zu definieren ist.

Es sollen nun zunächst einige wesentliche Eigenschaften mehr-dimensionaler HERMITEScher Polynome<sup>13</sup> angeführt werden. Es sei

$$H_{ij\ldots}^{(m)}(\mathfrak{w}) = \frac{(-1)^m}{\omega(\mathfrak{w})} \frac{\partial^m \omega(\mathfrak{w})}{\partial w_i \partial w_j \ldots} \quad (34)$$

ein Tensor  $m$ -ter Ordnung und ein (hermitesches) Polynom  $m$ -ten Grades, wobei

$$\omega(\mathfrak{w}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp(-\frac{1}{2}\mathfrak{w}^2) \quad (35)$$

die Gewichtsfunktion mit der Normierung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathfrak{w}) dw_1 \dots dw_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathfrak{w}) d\mathfrak{w} = 1 \quad (36)$$

ist.

Die ersten HERMITESchen Polynome sind

$$H_i^{(0)} = 1, \quad H_i^{(1)} = w_i,$$

$$H_{ij}^{(2)} = w_i w_j - \delta_{ij},$$

$$H_{ijk}^{(3)} = w_i w_j w_k - (w_i \delta_{jk} + w_j \delta_{ik} + w_k \delta_{ij}),$$

$$\begin{aligned} H_{ijkl}^{(4)} = & w_i w_j w_k w_l - (w_i w_j \delta_{kl} + w_i w_k \delta_{jl} + w_i w_l \delta_{jk} \\ & + w_i w_l \delta_{jk} + w_j w_k \delta_{il} + w_j w_l \delta_{ik} + w_k w_l \delta_{ij} \\ & + (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})). \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsrelationen für diese Polynome sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathfrak{w}) H_{ij\ldots}^{(n)}(\mathfrak{w}) H_{kl\ldots}^{(m)}(\mathfrak{w}) dw_1 \dots dw_N \\ = \delta_{ij\ldots, kl\ldots}^{mn} \quad (37) \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_{ij\ldots, kl\ldots}^{mn} = \begin{cases} m! & \text{für } m = n \text{ und } i j \ldots = k l \ldots \\ 0 & \text{für } m \neq n \text{ oder } i j \ldots \neq k l \ldots \end{cases}$$

eine Verallgemeinerung des KRONECKER-Tensors ist. Demzufolge hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega[H_{ij\ldots}^{(n)}]^2 d\mathfrak{w} = n!$$

Zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte in eine Reihe HERMITEScher Polynome wird der dimensionslose Geschwindigkeitsvektor

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{V}/(R T)^{1/2}; \quad \mathfrak{V} = \sum_k (\mathfrak{v}_k - \mathfrak{u}) \quad (38)$$

eingeführt. Es sei ferner

$$f^{(0)} = \frac{\varrho}{m(R T)^{3/2}} \omega(\mathfrak{w}).$$

Für eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  hat man dann

$$\frac{m(R T)^{3/2}}{\varrho} f = \omega(\mathfrak{w}) \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \left\{ \sum_{ijk\ldots} a_{ijk\ldots}^{(\kappa)} H_{ijk\ldots}^{(\kappa)}(\mathfrak{w}) \right\}. \quad (39)$$

Zur Ermittlung der Koeffizienten  $a_{ijk\ldots}^{(\kappa)}$  multipliziert man Gl.(39) mit  $H_{ijk\ldots}^{(\kappa)}$  und integriert über  $\mathfrak{w}$ . Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (37) hat man sofort

$$\begin{aligned} a_{ijk\ldots}^{(\kappa)} &= \frac{m(R T)^{3/2}}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ijk\ldots}^{(\kappa)}(\mathfrak{w}) f d\mathfrak{w} \quad (40) \\ &= \frac{m}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ijk\ldots}^{(\kappa)}(\mathfrak{w}) f d\mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Führt man  $\mathfrak{V} = \Sigma \mathfrak{V}_k$  ein, dann folgt

$$a_{ijk\ldots}^{(\kappa)} = \frac{1}{\varrho} \sum_{k=1}^N m_k \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ijk\ldots}^{(\kappa)}(\mathfrak{w}_k) d\mathfrak{v},$$

wobei schon jetzt die Übereinstimmung mit (14) auffällt.

Tatsächlich erhält man explizit für (40) die Relationen

$$a^{(0)} = 1, \quad (41)$$

$$a_i^{(1)} = \frac{j_i}{\varrho(R T)^{1/2}}, \quad (42)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{P_{ij}}{\varrho R T} - \delta_{ij}, \quad (43)$$

<sup>13</sup> H. GRAD, Comm. Pure Appl. Math. 2, 325 [1949].

$$a_{ijk}^{(3)} = \frac{Q_{ijk}}{\varrho(R T)^{3/2}} - \frac{1}{\varrho(R T)^{1/2}} (j_i \delta_{jk} + j_j \delta_{ik} + j_k \delta_{ij}), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} a_{ijkl}^{(4)} &= \frac{S_{ijkl}}{\varrho(R T)^2} - \frac{1}{\varrho R T} (P_{ij} \delta_{kl} + P_{ik} \delta_{jl} + P_{il} \delta_{jk} \\ &+ P_{jk} \delta_{il} + P_{jl} \delta_{ik} + P_{kl} \delta_{ij}) + (\delta_{ij} \delta_{kl} \\ &+ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (45)$$

Eine physikalische Deutung ist nur bekannt für die Momente bis einschließlich desjenigen dritter Ordnung. Es liegt daher nahe, die Reihenentwicklung so abzubrechen, daß  $a_{ijklm}^{(5)} = 0$  gesetzt wird. Mit Hilfe von Gl. (24) kann dann so später das Moment

vierter Ordnung unter Zuhilfenahme des Drucktensors eliminiert werden. Damit ist die Reihenentwicklung (39) vollständig gegeben und die Wahrscheinlichkeitsdichte durch die ersten Momente ausgedrückt.

Es ist an dieser Stelle zu bemerken, daß die Konvergenz der Entwicklung (39) für den eindimensionalen Fall bewiesen ist und hiervon auf die Konvergenz des mehrdimensionalen Falles geschlossen wird. Eine explizite mathematische Beweisführung für die Konvergenz im mehrdimensionalen Fall scheint bis jetzt nicht vorzuliegen.

#### 4. Allgemeine Transportgleichung

Nachdem die Wahrscheinlichkeitsdichte durch die Momente ausgedrückt wurde, soll nun ein Gleichungssystem für dieselben angegeben werden. Dies geschieht mit Hilfe der allgemeinen Transportgleichung (9). Setzt man für  $\alpha$  die Tensoren  $V_i V_j \dots$  ein, und nimmt man die Definition der Momente, Gl. (14), zu Hilfe, dann folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{\alpha,ij\dots}^{(n)} &+ \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} M_{\alpha,ij\dots}^{(n+1)} + M_{\alpha,ij\dots}^{(n)} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}} + u_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha,ij\dots}^{(n)}}{\partial r_{\alpha}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^r m_k \left[ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} V_{k,i} V_{k,j} \dots \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle + \sum_{\alpha} \left\langle (V_{k,\alpha} + u_{\alpha}) \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial r_{\alpha}} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle \right] \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha} \left\langle F_{\alpha} \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial (V_{k,\alpha} + u_{\alpha})} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha} \left\langle X_{\alpha} \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial (V_{k,\alpha} + u_{\alpha})} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Man hat ferner

$$\left\langle m_k \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial t} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle = - M_{j\dots}^{(n-1)} \frac{\partial u_i}{\partial t} - M_{i\dots}^{(n-1)} \frac{\partial u_j}{\partial t} - \dots = - \sum_m M_{i\dots+m}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \left\langle m_k (V_{k,\alpha} + u_{\alpha}) \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial r_{\alpha}} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle &= - M_{\alpha i\dots}^{(n)} \frac{\partial u_j}{\partial r_{\alpha}} - M_{\alpha j\dots}^{(n)} \frac{\partial u_i}{\partial r_{\alpha}} - \dots - M_{i\dots}^{(n-1)} u_{\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial r_{\alpha}} - M_{j\dots}^{(n-1)} u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial r_{\alpha}} - \dots \\ &= - \sum_m M_{\alpha i\dots+m}^{(n)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\alpha}} - \sum_m M_{i\dots+m}^{(n-1)} u_{\alpha} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\text{sowie } F_{\alpha} \left\langle \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots}{\partial (V_{k,\alpha} + u_{\alpha})} \delta(r_k - r) ; f^{(N)} \right\rangle = F_{\alpha} \left\{ M_{i\dots}^{(n-1)} \delta_{i\alpha} + M_{j\dots}^{(n-1)} \delta_{j\alpha} + \dots \right\} = F_{\alpha} \sum_m M_{i\dots+m}^{(n-1)} \delta_{\alpha m},$$

$$\text{wegen } F_i \frac{\partial v_{k,j}}{\partial v_{k,i}} = F_i \delta_{ij}.$$

Dabei darf man in der letzten Gleichung die äußeren Kräfte  $F_{\alpha}$  vor das Integral ziehen, wenn diese nicht von der Geschwindigkeit abhängen, was zunächst angenommen werden soll. Im Falle eines Plasmas jedoch ist  $F_{\alpha}$  von der Geschwindigkeit  $v$  abhängig. Man hat

$$\mathfrak{F} = e \mathfrak{E} + \frac{e}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{B} = e \mathfrak{E} + \frac{e}{c} \mathfrak{u} \times \mathfrak{B} + \frac{e}{c} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B},$$

bzw., in Komponentenschreibweise,

$$F_{\alpha} = e E_{\alpha} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu} V_{\lambda} B_{\mu},$$

wobei  $\varepsilon_{\alpha\lambda\mu}$  die LEVI-CIVITA-Tensordichte ist. Auf Grund der obigen Entwicklung erhält man dann so-

fort

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ e E_{\mathbf{z}} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} u_{\lambda} B_{\mu} \right\} \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{r})}{\partial (V_{k,z} + u_z)} ; f^{(N)} \right\rangle \\ &= \left\langle e \langle E_{\mathbf{z}} \rangle + \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} u_{\lambda} \langle B_{\mu} \rangle \right\rangle \sum_m M_{i \dots \neq m}^{(n-1)} \delta_{zm} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} B_{\mu} V_{\lambda} \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{r})}{\partial (V_{k,z} + u_z)} ; f^{(N)} \right\rangle \\ &= \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} \langle B_{\lambda} \rangle \sum_m M_{\lambda \dots \neq m}^{(n-1)} \delta_{zm}. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungsweise  $\langle E \rangle$ ,  $\langle B \rangle$  bedeutet, daß die Felder über den Raum der  $\mathbf{r}_k$  gemittelt sind, eine Aussage, die dann sinnvoll wird, wenn Beiträge der lokalen inneren Felder zu den äußeren Feldern hinzugeschlagen werden. Zur Abkürzung sei noch eingeführt

$$\left\langle X_{\mathbf{z}} \frac{\partial V_{k,i} V_{k,j} \dots \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{r})}{\partial (V_{k,z} + u_z)} ; f^{(N)} \right\rangle = \left\langle X_{\mathbf{z}} \frac{\partial V_i V_j \dots}{\partial v_z} \right\rangle$$

Dieser Ausdruck liefert den Beitrag der Wechselwirkung „innerer Felder“.

Damit folgt die allgemeine Transportgleichung nun zu \*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} M_{v,i \dots}^{(n)} + \sum_{\mathbf{z}} \left[ \frac{\partial}{\partial r_{\mathbf{z}}} M_{v,z \dots}^{(n+1)} + u_{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial r_{\mathbf{z}}} M_{v,i \dots}^{(n)} \right] \\ &+ \sum_m M_{v,i \dots \neq m}^{(n-1)} \frac{\partial n_m}{\partial t} + \sum_{\mathbf{z}} \left[ M_{v,i \dots}^{(n)} \frac{\partial u_{\mathbf{z}}}{\partial r_{\mathbf{z}}} + \sum_m M_{v,z \dots \neq m}^{(n)} \right] + \sum_{\mathbf{z}} \sum_m M_{v,i \dots}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\mathbf{z}}} \\ & - \sum_{\mathbf{z}} \left\{ e E_{\mathbf{z}} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_{\mathbf{z}}^{(g)} \right\} \sum_m M_{v,i \dots \neq m}^{(n-1)} \delta_{zm} - \sum_{\mathbf{z}} \frac{e}{c} \varepsilon_{\mathbf{z} \lambda \mu} B_{\mu} \sum_m M_{v,\lambda \dots}^{(n)} \delta_{zm} = \sum_{k=1}^v \sum_{\mathbf{z}} \left\langle X_{\mathbf{z}} \frac{\partial V_i V_j \dots}{\partial v_{\mathbf{z}}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Dies ist zunächst ein System von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung der  $M_{i \dots}^{(n)}(\mathbf{r}, t)$ . Bevor die Frage der Lösung dieses Systems diskutiert wird, soll noch ein Vergleich mit auf andere Weise gewöhnlichen Transportgleichungen durchgeführt werden.

Es sei der Begriff der Randverteilungsfunktion eingeführt<sup>11, 12</sup>. Diese ist definiert durch

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n; \quad n > k.$$

Die Randverteilungsfunktion reduziert eine  $n$ -dimensionale Verteilung auf eine  $k$ -dimensionale. Infolge

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) &= \frac{d^k F(x_1, \dots, x_k)}{dx_1 \dots dx_k} \\ &= \frac{d^k}{dx_1 \dots dx_k} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_n \dots dx_k \dots dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_n \dots dx_{k+1} \end{aligned}$$

hat man

$$f(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n$$

als Definition der Randwahrscheinlichkeitsdichte.

Wendet man eine solche Integration auf die LIOUVILLE-Gl. (6) an, dann folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte eines einzelnen Teilchens<sup>14</sup>

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{1}{(N-1)!} \sum_{k=1}^N \int \int \mathfrak{X}_k \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_k} d\mathbf{r}_k^{N-1} d\mathbf{v}_k^{N-1}. \quad (47)$$

\* Hierin ist nun  $\mathfrak{F}^{(g)}$  als nichtelektromagnetischer Anteil der äußeren Kräfte gesetzt.

Diese Gleichung hat eine gewisse formale Ähnlichkeit mit der BOLTZMANN-Gleichung

$$\frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial \mathfrak{r}} + \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial \mathfrak{v}} = \iiint (f^{(\mu)'} f_1^{(\mu)'} - f^{(\mu)} f_1^{(\mu)}) g b \, db \, d\mathfrak{v}_1. \quad (48)$$

KIRKWOOD<sup>14</sup> hat gezeigt, daß (47) unter sehr einschränkenden Bedingungen in Gl. (48) übergeht. Setzt man die rechte Seite von Gl. (47) gleich  $A^{(N)}$  und die rechte Seite von Gl. (48)  $A^{(\mu)}$ , dann erhält man ohne weiteres folgende Transportgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} M_{r,ij\dots}^{(n)} + \sum_{\mathfrak{x}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_{\mathfrak{x}}} M_{\mathfrak{x}ij\dots}^{(n+1)} + u_{\mathfrak{x}} \frac{\partial}{\partial r_{\mathfrak{x}}} M_{ij\dots}^{(n)} \right\} \\ & + \sum_m M_{i\dots \neq m}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \sum_{\mathfrak{x}} \left\{ M_{ij\dots}^{(n)} \frac{\partial u_{\mathfrak{x}}}{\partial r_{\mathfrak{x}}} + \sum_{\mathfrak{x}} \sum_m M_{\mathfrak{x}ij\dots}^{(n)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\mathfrak{x}}} \right\} + \sum_{\mathfrak{x}} \sum_m M_{i\dots \neq m}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\mathfrak{x}}} \\ & - \sum_{\mathfrak{x}} F_{\mathfrak{x}} \sum_m M_{\mathfrak{x}ij\dots \neq m}^{(n-1)} \delta_{\mathfrak{x}m} = \begin{cases} \sum_{\mathfrak{x}} \left\langle \frac{\partial V_i V_j \dots}{\partial v_{\mathfrak{x}}} A^{(N)} \right\rangle, & \text{integrierte LIOUVILLE-Gleichung;} \\ \sum_{\mathfrak{x}} \left\langle \frac{\partial V_i V_j \dots}{\partial v_{\mathfrak{x}}} A^{(\mu)} \right\rangle, & \text{BOLTZMANN-Gleichung.} \end{cases} \end{aligned} \quad (49)$$

Man sieht sofort, daß die Unterschiede in Gln. (46) und (49) nur in den rechten Seiten bestehen. Der physikalische Grund hierfür ist sofort einzusehen, wenn man bedenkt, daß diese Größen auf der rechten Seite beim Übergang auf das Gesamtsystem summationsinvariant<sup>15</sup> sind, soweit es sich um Erhaltungssätze handelt. Die so resultierenden makroskopischen Erhaltungssätze für das Gesamtsystem müssen im wesentlichen unabhängig von der verwendeten statistischen Grundgleichung sein. Unterschiede machen sich bemerkbar bei den Gleichungen für die Transportgrößen, die wesentlich durch die „inneren“ Felder bestimmt sind.

## II. Allgemeine Form der hydromagnetischen Gleichungen und der Maxwellschen Gleichungen für Mikrofelder

### 1. Die Hamilton-Funktion für ein Plasma mit Berücksichtigung der Strahlung

Zur Explizierung der Transportgleichungen aus der allgemeinen Transportgleichung (46) wird die HAMILTON-Funktion für ein System geladener Teilchen in Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern<sup>7, 16</sup> eingeführt.

$$H = \sum_k H_k + \sum_{\lambda} H_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} + \sum_k e_k \varphi^e(k),$$

Teilchen      Transversal-Wellen      Longitudinal-Wellen

<sup>14</sup> J. G. KIRKWOOD, J. Chem. Phys. **15**, 72 [1947].

<sup>15</sup> J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS u. R. B. BIRD, Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley & Sons, New York 1954, S. 460.

$$H_k = \left[ \mu^2 + \left( \mathfrak{p}_k - e_k \sum_{\lambda} q_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} - e_k \mathfrak{A}^e \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \mu = m c^2,$$

$$H_{\lambda} = \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \nu_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2).$$

Der erste Term in der HAMILTON-Funktion gibt die kinetische Energie der Teilchen und deren Wechselwirkung mit der Strahlung an. Der zweite Term stellt die Energie der Strahlung dar, während der dritte die (COULOMBSche) Wechselwirkung der Teilchen untereinander ausdrückt. Bei dieser Darstellung wurde das elektrische Feld in

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^{\text{trans}} + \mathfrak{E}^c$$

und das magnetische Feld in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^e + \mathfrak{B}^i$$

ausgedrückt, wobei

$$\mathfrak{E}^c = \sum_{k=1}^N e_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|^3}$$

der durch COULOMBSche Wechselwirkung entstehende Anteil und

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{E}^{\text{trans}} = 0$$

der transversale Anteil am elektrischen Feld ist.

Die Felder  $\mathfrak{E}^{\text{trans}}$  und  $\mathfrak{B}^i$  werden durch die FOURIER-Ansätze

$$\mathfrak{E}^{\text{trans}} = - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda},$$

<sup>16</sup> W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation. Oxford Univ. Press, London 1945.

$$\mathfrak{B}^i = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathfrak{A}_{\lambda} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0,$$

sowie

dargestellt, wobei  $\mathfrak{A}$  das Vektorpotential und  $p_{\lambda}$ ,  $q_{\lambda}$  die Feldkoordinaten sind.

Für  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r})$  gilt<sup>16</sup>

$$\mathfrak{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathfrak{A} \right) - \frac{1}{c^2} \mathfrak{A} = -\frac{4\pi}{c} \varrho_e \mathfrak{v},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = -4\pi \varrho_e,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathfrak{A}_{\lambda} \right) + \frac{\nu_{\lambda}^2}{c^2} \mathfrak{A}_{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathfrak{A}_{\lambda} = 0.$$

Für  $\mathfrak{A}_{\lambda}$  gilt ferner die Orthogonalitätsrelation

$$\int (\mathfrak{A}_{\lambda} \cdot \mathfrak{A}_{\mu}) = 4\pi c^2 \delta_{\lambda\mu}.$$

Damit werden die Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} [H, \alpha] = & \sum_{k=1}^N \mathfrak{v}_k \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}_k} + \sum_{\lambda} p_{\lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial q_{\lambda}} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\{ e_k \mathfrak{E}_k^e + \frac{e_k}{c} \mathfrak{v}_k \times \mathfrak{B}_k^e + \mathfrak{F}_k \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{v}_k} \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\{ e_k \sum_{k=1}^N e_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|^3} + \frac{e_k}{c} \sum_{\lambda} p_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}_k) + \frac{e_k}{c} \mathfrak{v}_k \times \sum_{\lambda} q_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \times \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}_k) \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{v}_k} \\ & + \sum_{\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{c} \mathfrak{v}_k \cdot \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}_k) - \nu_{\lambda}^2 q_{\lambda} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{\lambda}}. \end{aligned} \quad (50)$$

## 2. Die Maxwellschen Gleichungen für Mikrofelder

Mit dem Ausdruck (50) und der Transportgleichung der Form (7) und (9) wurden die MAXWELLSchen Gleichungen der Elektrodynamik abgeleitet für den klassischen Fall<sup>7</sup> wie auch für den quantenmechanischen Fall<sup>3</sup>. Es wurde so gezeigt, daß diese Gleichungen auch für die Plasmamikrofelder gültig sind. Diese Gleichungen lauten, zusammen mit der Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\langle \sum_{k=1}^N e_k \mathfrak{v}_k; f^{(N)} \right\rangle = 0; \quad \left\langle \sum_{k=1}^N e_k \mathfrak{v}_k; f^{(N)} \right\rangle = \mathfrak{j}_e, \quad \frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathfrak{j}_e = 0. \quad (51, 52)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{B}^i \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \sum_{\lambda} p_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathfrak{A}_{\lambda}; f^{(N)} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \sum_{\lambda} p_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}; f^{(N)} \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{1}{c} \sum_{\lambda} p_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}; f^{(N)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \langle \mathfrak{E}^i \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathfrak{E}^c = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{B}^i \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \langle \mathfrak{E}^i \rangle = 0. \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{E}^{\text{trans}} \rangle &= -\frac{1}{c^2} \left\langle \sum_{\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{c} \mathfrak{A}_{\lambda} \cdot \mathfrak{v}_k - \nu_{\lambda}^2 q_{\lambda} \right\} \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}); f^{(N)} \right\rangle \\ &= -\frac{4\pi}{c} \left\langle \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\lambda} \sum_{k=1}^N e_k (\mathfrak{v}_k \cdot \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r})) \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}); f^{(N)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \sum_{\lambda} q_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}); f^{(N)} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{j}_e^{\text{trans}} = \left\langle \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\lambda} \sum_{k=1}^N e_k (\mathfrak{v}_k \cdot \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r})) \mathfrak{A}_{\lambda}(\mathbf{r}); f^{(N)} \right\rangle, \quad (54)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{E}^{\text{trans}} \rangle + \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}_e^{\text{trans}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \langle \mathfrak{B}^i \rangle. \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{E}^C \rangle &= \left\langle \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N e_k \mathfrak{v}_k \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \frac{1}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|} \right); f^{(N)} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N e_k \left\{ \mathfrak{v}_k \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{r}_k^2} \frac{1}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \left( \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \frac{\mathfrak{v}_k}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|} \right) \right\}; f^{(N)} \right\rangle \\
&= -\frac{4\pi}{c} \left\langle \sum_{k=1}^N e_k \left\{ \mathfrak{v}_k \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \left( \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \frac{\mathfrak{v}_k}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|} \right) \right\}; f^{(N)} \right\rangle, \\
\mathfrak{j}_e^{\text{long}} &= \left\langle \sum_{k=1}^N e_k \mathfrak{v}_k; f^{(N)} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N e_k \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \left( \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_k} \times \frac{\mathfrak{v}_k}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}|} \right); f^{(N)} \right\rangle; \tag{56}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{E}^C \rangle + \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}_e^{\text{long}} = 0. \tag{57}$$

Für die Gesamtfelder  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^{\text{trans}} + \mathfrak{E}^C$ ;  
 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^e + \mathfrak{B}^i$ , folgt:

mit Gl. (53)

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \times \langle \mathfrak{E} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{B} \rangle = 0;$$

mit Gln. (55) und (57)

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \times \langle \mathfrak{B} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathfrak{E} \rangle = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}_e.$$

Ferner folgt

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot \langle \mathfrak{B} \rangle = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot \langle \mathfrak{E} \rangle = 4\pi \varrho_e.$$

### 3. Die hydromagnetischen Gleichungen

Es werden nun zuerst die hydromagnetischen Glei-

chungen abgeleitet und diskutiert. Mit

$$\alpha = \sum_{k=1}^N m_k \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r})$$

erhält man aus (9) oder (46) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho_\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot (\varrho_\nu \mathfrak{v}_\nu) = \frac{\partial \varrho_\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot (\mathfrak{j}_\nu + \varrho_\nu \mathfrak{u}) = 0, \tag{58}$$

$$\text{wenn } \varrho_\nu = \left\langle \mathfrak{m}_\nu \sum_{k=1}^r \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}); f^{(N)} \right\rangle$$

die Massendichte der  $\nu$ -ten Plasmakomponente ist.

$$\text{Mit } \varrho_\nu \mathfrak{v}_\nu = \left\langle \mathfrak{m}_\nu \sum_{k=1}^r \mathfrak{v}_k \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}); f^{(N)} \right\rangle$$

erhält man die Bewegungsgleichungen (Impulssatz).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho_\nu \mathfrak{v}_\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \cdot (\varrho_\nu \mathfrak{v}_\nu \mathfrak{v}_\nu) - \left[ \varrho_{e_\nu} \mathfrak{E}_\nu^e + \frac{1}{c} \mathfrak{j}_{e_\nu} \times \mathfrak{B}_\nu^e + \varrho_\nu \mathfrak{F}_\nu^{(g)} \right] &= \mathfrak{C}, \\
\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{j}_\nu, i + \varrho_\nu \mathfrak{u}_j) + \sum_{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_\kappa} [P_{\nu, i j} + \mathfrak{u}_\kappa \mathfrak{j}_\nu, j + \mathfrak{u}_j \mathfrak{j}_\nu, \kappa + \varrho_\nu \mathfrak{u}_\kappa \mathfrak{u}_j] \\
&- \left[ \varrho_{e_\nu} E_{\nu, j}^e + \frac{1}{c} \varepsilon_{j \lambda \mu} \mathfrak{j}_{e_\nu, \lambda} B_{\nu, \mu}^e + \varrho_\nu F_{\nu, j}^{(g)} \right] = C_{\nu, j}, \tag{59}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_\nu &= \left\langle \mathfrak{e}_\nu \sum_{k=1}^r \left\{ \mathfrak{E}_k^i + \frac{\mathfrak{v}_k}{c} \times \mathfrak{B}_k^i \right\} \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}); f^{(N)} \right\rangle \\
&= N_\nu \mathfrak{e}_\nu \left\langle \left\{ \sum_\mu \frac{\mathfrak{r}_\mu - \mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}_\mu - \mathfrak{r}|^3} - \frac{1}{c} \sum_\lambda \dot{q}_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{r}) + \frac{\mathfrak{v}_k}{c} \times \sum_\lambda q_\lambda \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \times \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{r}) \right\} \delta(\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}); f^{(N)} \right\rangle \\
&= \varrho_\nu \langle \mathfrak{E}_\nu^i \rangle + \frac{1}{c} \left\langle \sum_{k=1}^r [\mathfrak{v}_k \times \mathfrak{B}_k^i] \delta(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}); f^{(N)} \right\rangle. \tag{60}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber nicht gleich

$$\varrho_{e_\nu} \langle \mathfrak{E}_\nu^i \rangle + \frac{1}{c} \mathfrak{j}_{e_\nu} \times \langle \mathfrak{B}_\nu^i \rangle,$$

wie er lauten müßte, wenn man – wie bisher üblich<sup>17</sup> – diese Glieder zu den Ausdrücken für das

äußere Feld hinzuschlagen wollte. Es zeigt sich somit, daß sich diese hier angegebenen hydromagneti-

<sup>17</sup> S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952, S. 178.

schen Gleichungen nicht vollständig auf diejenigen zurückführen lassen, die bisher als zutreffend angesehen wurden, worauf auch schon BRITTIN<sup>3</sup> hingewiesen hat.

### III. Aufstellung eines Systems partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der Momente

#### 1. Diskussion der erforderlichen Näherungen

Die wesentliche Schwierigkeit in der Anwendung der exakten hydromagnetischen Gleichungen liegt darin begründet, daß bis jetzt noch kein Verfahren zur Lösung des Integrals (60) bekannt ist.

Man kann nun als Näherung von vornherein über die inneren Felder mitteln und diese Anteile zu denjenigen der äußeren Felder hinzufügen, jedoch gibt man damit die Möglichkeit einer exakten Beschreibung mikroskopischer Erscheinungen im Plasma auf. Denn für eine Betrachtung mikroskopischer Erscheinungen ist es gerade wichtig, den exakten Verlauf dieser inneren Felder als Funktion von  $r$  und  $t$  im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsdichte zu kennen.

Um aber wenigstens ein Gleichungssystem für die Transportgrößen zu erhalten, welches unter Umständen als Ausgangspunkt für eine brauchbare genauere Beschreibung mikroskopischer Vorgänge verwendet werden kann, soll eine solche Mittelung über die inneren Felder durchgeführt werden. Dieses Verfahren scheint immer dann zutreffend, wenn zumindest die Voraussetzung gegeben ist, daß die mitt-

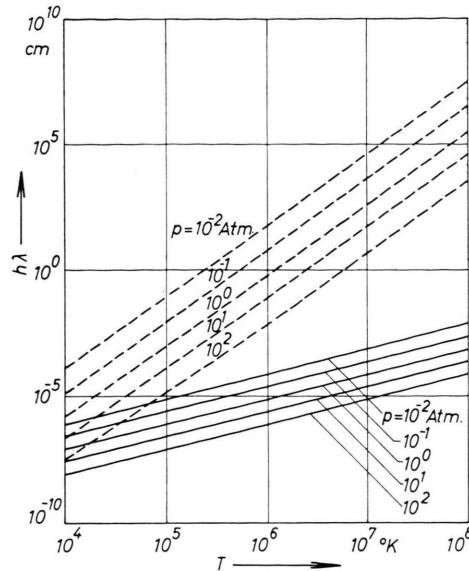


Abb. 1. DEBYE-Radius  $h$  — und mittlere freie Weglänge  $\lambda$  — in einem Plasma (Gleichgewicht!) als Funktion der Temperatur  $T$  mit dem Gesamtdruck  $p$  als Parameter.

lere freie Weglänge  $\lambda$  für eine Ablenkung um  $\pi/2$  gegenüber dem DEBYE-Radius  $h$  sehr groß ist. In diesem Fall ist dann  $h$  die charakteristische Länge im Plasma für elektrische Erscheinungen. Für magnetische Erscheinungen ist jedoch der Gyroradius als charakteristische Länge anzusehen. In Abb. 1 sind  $\lambda$  und  $h$  veranschaulicht. Man sieht, daß die hier gemachte Approximation mit einiger Berechtigung für Temperaturen oberhalb  $10^5$  K und nicht zu großen Drucken verwendet werden kann.

#### 2. Die Momentengleichungen als partielle Differentialgleichungen

Die allgemeine Transportgleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{r,ij\dots}^{(n)} + \sum_{\lambda} \left[ \frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} M_{r,\lambda ij\dots}^{(n+1)} + u_{\lambda} \frac{\partial}{\partial r_{\lambda}} M_{r,ij\dots}^{(n)} \right] \\ + \sum_m M_{r,i\dots \neq m}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left[ M_{r,ij\dots}^{(n)} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial r_{\lambda}} + \sum_m M_{r,i\dots \neq m}^{(n)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\lambda}} \right] + \sum_{\lambda} \sum_m M_{r,i\dots \neq m}^{(n-1)} \frac{\partial u_m}{\partial r_{\lambda}} \\ - \sum_{\lambda} \left\{ e_r E_{\lambda} + \frac{e_r}{c} \epsilon_{\lambda\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_{\lambda}^{(g)} \right\} \sum_m M_{r,i\dots \neq m}^{(n-1)} \delta_{\lambda m} - \sum_{\lambda} \frac{e_r}{c} \epsilon_{\lambda\lambda\mu} B_{\mu} \sum_m M_{r,\lambda i\dots \neq m}^{(n)} \delta_{\lambda m} = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

wobei

$$F_{\lambda} = e E_{\lambda} + \frac{e}{c} \epsilon_{\lambda\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + \frac{e}{c} \epsilon_{\lambda\lambda\mu} V_{\lambda} B_{\mu} + F_{\lambda}^{(g)} \quad (62)$$

die äußeren Kräfte zusammen mit dem Beitrag der inneren Felder darstellt. In diesem Zusammenhang siehe auch CHAPMAN und COWLING<sup>18</sup>. Für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{V}$  gelten dann die MAXWELLSchen Gleichungen.

<sup>18</sup> S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, I. c. <sup>17</sup>, S. 323.

Aus der Transportgleichung (61) lassen sich nun sofort die Gleichungen für die Transportgrößen Massenstrom  $j_i$ , Drucktensor  $P_{ij}$  und Wärmestromtensoren  $Q_{ijl}$  angeben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} j_{v,i} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial P_{v,ij}}{\partial r_{\lambda}} + u_{\lambda} \frac{\partial j_{v,i}}{\partial r_{\lambda}} \right) + \varrho_v \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} j_{v,\lambda} + \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial r_{\lambda}} j_{v,i} + \varrho_v u_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} \right) \\ - \varrho_v \left\{ e_v E_i + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{i\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_i^{(g)} \right\} - \frac{e_v}{c} \varepsilon_{i\lambda\mu} j_{v,\lambda} B_{\mu} = 0 ; \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{v,ij}}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial Q_{v,ij\lambda}}{\partial r_{\lambda}} + u_{\lambda} \frac{\partial Q_{v,ij}}{\partial r_{\lambda}} \right) + \left( j_{v,j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + j_{v,i} \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} P_{v,\lambda j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_{\lambda}} P_{v,\lambda i} + \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial r_{\lambda}} P_{v,ij} \right. \\ \left. + u_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} j_{v,j} + u_{\lambda} \frac{\partial u_j}{\partial r_{\lambda}} j_{v,i} \right) - j_{v,i} \left\{ e_v E_j + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{j\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_j^{(g)} \right\} \\ - j_{v,j} \left\{ e_v E_i + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{i\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_i^{(g)} \right\} - \sum_{\lambda} \frac{e_v}{c} \varepsilon_{\lambda\mu\lambda} B_{\mu} \{ P_{v,\lambda j} \delta_{\lambda i} + P_{v,\lambda i} \delta_{\lambda j} \} = 0 ; \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{v,ijl}}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial S_{v,ijl\lambda}}{\partial r_{\lambda}} + u_{\lambda} \frac{\partial Q_{v,ijl}}{\partial r_{\lambda}} \right) + \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} P_{v,il} + \frac{\partial u_j}{\partial t} P_{v,il} + \frac{\partial u_l}{\partial t} P_{v,ij} \right) \\ + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} Q_{v,jl\lambda} + \frac{\partial u_j}{\partial r_{\lambda}} Q_{v,il\lambda} + \frac{\partial u_l}{\partial r_{\lambda}} Q_{v,ij\lambda} + \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial r_{\lambda}} Q_{v,ijl} + u_{\lambda} \frac{\partial u_l}{\partial r_{\lambda}} P_{v,il} + u_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial r_{\lambda}} P_{v,il} + u_{\lambda} \frac{\partial u_j}{\partial r_{\lambda}} P_{v,ij} \right) \\ - P_{v,il} \left\{ e_v E_i + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{i\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_i^{(g)} \right\} - P_{v,il} \left\{ e_v E_l + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{j\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_j^{(g)} \right\} - P_{v,ij} \left\{ e_v E_l + \frac{e_v}{c} \varepsilon_{l\lambda\mu} u_{\lambda} B_{\mu} + F_l^{(g)} \right\} \\ - \sum_{\lambda} \left\{ \frac{e_v}{c} \varepsilon_{\lambda\mu\lambda} B_{\mu} (Q_{\lambda jl} \delta_{\lambda i} + Q_{\lambda il} \delta_{\lambda j} + Q_{\lambda ij} \delta_{\lambda l}) \right\} = 0 . \end{aligned}$$

In Gl. (65) ist

$$S_{v,ijl\lambda} = \frac{1}{\varrho} [P_{v,ij} P_{v,l\lambda} + P_{v,il} P_{v,j\lambda} + P_{v,ij\lambda} P_{v,il}] .$$

Dies ist ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die Transportgrößen. Zusammen mit den hydromagnetischen Gleichungen hat man ein System zur Berechnung charakteristischer makroskopischer Größen in der Plasmodynamik.

### 3. Diskussion der Anwendbarkeit. Möglichkeiten zur Erweiterung

Wie bereits erwähnt, läßt sich die hier angegebene Lösung nicht für eine zufriedenstellende Beschreibung mikroskopischer Erscheinungen im Plasma verwenden. Dies liegt im wesentlichen daran, daß über die Mikrofelder integriert wurde und somit bereits von vornherein kumulative Effekte betrachtet werden. Diese außerhalb des DEBYE-Radius stattfindende Plasmawechselwirkung gibt bekanntlich Plasmawirkungen, die dann unter Zuhilfenahme der MAXWELLSchen Gleichungen berechnet werden können. Es wurde bereits gezeigt, daß die MAXWELLSchen Gleichungen auch für die Plasma-Mikrofelder gültig sind. Es wurde weiterhin angenommen, daß

Stöße innerhalb des DEBYE-Radius vernachlässigbar seien.

Die Einführung der Mittelung über die inneren Felder bedingt, daß eine Beschreibung durch das angegebene Gleichungssystem nur solange gültig ist, solange der Begriff der makroskopischen Observablen nicht durch Schwankungserscheinungen hinfällig wird. Dies ist in einer anderen Arbeit<sup>19</sup> diskutiert.

Das abgeleitete Gleichungssystem jedoch eignet sich zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von vollionisierten Plasmen geringer Dichte. Über die bisher gebräuchlichen Gleichungen hinaus stellt es ein in sich geschlossenes System dar, da es gleichzeitig die Bestimmungsgleichungen für die Transportgrößen enthält. Außerdem ist eine zeitliche Änderung der Transportgrößen gegeben, so daß eine Betrachtung von Relaxationsvorgängen möglich ist.

<sup>19</sup> H. J. KAEPELER, On the Phenomenological Equations of Fully Ionized Plasmas Derived from a Statistical Description. IVth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, August 1959.

Zu den üblichen phänomenologischen Gleichungen der Magnetohydrodynamik kommt man von dem hier angegebenen System auf einfache Weise. Zuerst wird die Zeitabhängigkeit der Transportgrößen fallen gelassen (relaxationsfreie Einstellung) und daraufhin macht man den bekannten linearen phänomenologischen Ansatz zwischen Kräften und Flüssen<sup>20</sup>; zuletzt wird die Einwirkung der Viskosität auf die Wärmeleitung und umgekehrt vernachlässigt.

Ansätze zu einer Erweiterung wären mit einer näherungsweisen Behandlung der Wechselwirkung innerhalb der DEBYE-Sphäre zu beginnen. Bisher wurden hierfür die Stoßintegrale für Zweierstöße oder Entwicklungen von FOKKER-PLANCK-Termen verwendet. Es könnte möglich sein, über die FOKKER-PLANCK-Gleichung und einem Ansatz für eine Gruppendiffusionsmethode weiter zu kommen. Eine wei-

tere wesentliche Aufgabe wäre in einer sorgfältigen Ausdeutung der in den MAXWELL-Gleichungen für Plasma-Mikrofelder vorkommenden einzelnen Terme zu sehen.

Zuletzt dürfte es interessant sein, in Analogie zur Gasdynamik mit dem hier vorgelegten Differentialgleichungssystem ein Charakteristikenverfahren der Magnetohydrodynamik zu entwickeln.

Der Verfasser hat Herrn Prof. HÖCKER für förderndes Interesse und wertvolle Diskussionen zu danken. Eine Kurzfassung dieser Arbeit wurde anlässlich der Fusionsarbeitsstagung im MPI in München (9. Dezember 1958) vorgetragen. Für die dem Vortrag folgende Diskussion und die daraus hervorgehenden Anregungen ist der Verfasser Herrn Prof. SCHLÜTER zu Dank verpflichtet.

<sup>20</sup> J. O. HIRSCHFELDER et al., I. c.<sup>15</sup>, S. 495, 709.

## NOTIZEN

### Messung der Energie zur Bildung eines Gitterdefektes in verschiedenen $A^{III}B^V$ -Verbindungen durch Elektronenbestrahlung

Von R. BÄUERLEIN

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG,  
Erlangen  
(Z. Naturforsch. **14 a**, 1069—1071 [1959]; eingeg. am 26. Oktober 1959)

Beim Streuprozeß schneller Elektronen an Gitteratomen wird bei genügend hoher Elektronenenergie gelegentlich auf ein Gitteratom eine so große Energie übertragen, daß dieses seinen Gitterplatz verlassen kann. Dabei entsteht im Gitter ein Fehlstellenpaar, nämlich ein Zwischengitteratom und eine Leerstelle. Neben der Zahl der pro einfallendes Elektron gebildeten Defekte interessiert hauptsächlich noch die Mindestenergie, die auf das Gitteratom übertragen werden muß, um diesen Prozeß auszulösen. Die Größe dieser Energie läßt Rückschlüsse auf die Bindungsfestigkeit der Gitteratome im Kristallverband zu.

Bei den Halbleitern der IV. Gruppe des Periodischen Systems, Si und Ge, ist dieser Energiewert bereits bekannt. Zu seiner Bestimmung sind zwei Methoden angewendet worden, die sich durch die Art, wie das Auftreten von Gitterfehlstellen beobachtet wird, unterscheiden. Aus der Änderung der Leitfähigkeit elektronenbestrahlter Ge-Proben haben KLONTZ und LARK HOROWITZ<sup>1</sup> für diese Energie 31 eV, VAVILOV u. a.<sup>2</sup> 22 eV und BROWN und AUGUSTYNIAK<sup>3</sup> 14,4 eV erhalten. LOFERSKI und RAPPAPORT<sup>4</sup> bestimmten die gleiche Energie

aus der Änderung der Diffusionslänge in elektronenbestrahlten p-n-Sperrschiichtelementen für Ge zu 14,5 und Si zu 12,9 eV.

Unsere Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung dieser Energie an den  $A^{III}B^V$ -Halbleitern InP, GaAs und InAs. Da wir von diesen Substanzen Sperrschiichtelemente erhalten konnten, wählen wir die zweite der oben beschriebenen Meßmethoden, die sich gerade zur Bestimmung von Schwellwerten besonders eignet. Bei diffundierten p-n-Übergängen läßt sich die empfindliche Schicht nahe an die Oberfläche legen, in jene Zone also, in der bei der Bestrahlung mit Elektronen auch die hauptsächlichen Effekte stattfinden.

Die für die Bestrahlungsexperimente benötigten schnellen Elektronen werden mit einer Hochspannungsanlage in GREINACHER-Schaltung beschleunigt, die es gestattet, die Hochspannung zwischen 50 und 500 kV kontinuierlich und genau einzustellen. Aus dem Elektronenstrahl wird ein  $1/2 - 1 \text{ mm}^2$  großes Bündel ausgebündet, das unmittelbar darauf das zu untersuchende Sperrschiichtelement trifft. Die Bestrahlungsdichten variieren zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-4} \text{ A/cm}^2$ . Gleichzeitig werden bei der Bestrahlung der Elektronenstrom  $j_e$  als Ableitstrom gegen Erde und der Diffusionsstrom  $j_K$  des Sperrschiichtelementes im kurzgeschlossenen Außenkreis gemessen. Für das Verhältnis dieser beiden Ströme und der Konzentration  $N_r$  der Rekombinationszentren besteht folgende Beziehung<sup>4</sup>:

$$N_r \sim (j_e/j_K)^2. \quad (1)$$

Diese Beziehung folgt aus der Theorie der Sperrschiichtelemente unter der Annahme, daß die Reichweite der

<sup>1</sup> E. E. KLONTZ u. K. LARK HOROWITZ, Phys. Rev. **86**, 643 [1952].

<sup>2</sup> V. S. VAVILOV, L. S. SMIRNOV, G. N. GALKIN, A. V. SPITSYN u.

V. M. PATSKEVICH, J. Tech. Phys. USSR **26**, 1865 [1956].

<sup>3</sup> W. L. BROWN u. W. M. AUGUSTYNIAK, J. Appl. Phys. **30**, 1300 [1959].

<sup>4</sup> J. J. LOFERSKI u. P. RAPPAPORT, Phys. Rev. **111**, 432 [1958].